TEMA 3: ESTIMACIÓN PUNTUAL.

1.- Se extrae una muestra por m.a.s. de tamaño ñnò de una población que sigue el modelo de Poisson. Obtener el estimador por el método de los momentos y el estimador por el método de máxima verosimilitud.

Solución:

El método de los momentos iguala momentos respecto al origen muestrales y poblacionales. Como sólo hay un parámetro a estimar (el ***ñəò****) se necesita plantear una ecuación. Lo razonable es buscar la más sencilla y comprobar que da un resultado* ***ñ****adecuado****ò*** *(soluciona el problema que se tiene).*

El primer momento muestral es $a_1 = \dfrac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n} = \overline{X}$

El primer momento poblacional es $\alpha_1 = E(\xi) = \lambda$ *ya que sigue modelo Poisson*

Igualando $a_1 = \alpha_1 \Rightarrow \overline{X} = \lambda \Rightarrow \hat{\theta}_{mm} = \overline{X}$

El método de máxima verosimilitud utiliza la función de probabilidad poblacional (en este caso discreta al ser Ley Poisson), obtiene la verosimilitud, toma logaritmos y maximiza.

Función de probabilidad poblacional

$$P(\xi = x, \theta) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} = \frac{\theta^x}{x!} e^{-\theta} \quad para \quad x = 0,1,2,...,\infty$$

Función de Verosimilitud

$$L(x_1,...,x_n, \boldsymbol{d}) = \prod_{i=1}^{n} P(\xi = x_i, \theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\theta^{x_i}}{x_i!} e^{-\theta} = \frac{\theta^{\sum_{i=1}^{n} x_i}}{\prod_{i=1}^{n} x_i!} e^{-n\theta}$$

Función Soporte (logaritmo de la función de verosimilitud)

$$\ln L(x_1,...,x_n, \boldsymbol{d}) = \ln \frac{\theta^{\sum_{i=1}^{n} x_i}}{\prod_{i=1}^{n} x_i!} e^{-n\theta} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \ln\theta - n\theta - \ln\left(\prod_{i=1}^{n} x_i!\right)$$

Máximo que conduce al estimador (el punto donde se alcanza el máximo)

C.N.
$$\frac{\partial \ln L(x_1,...,x_n, \boldsymbol{d})}{\partial\theta} = 0 \Rightarrow \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)}{\theta} - n = 0 \Rightarrow \hat{\boldsymbol{d}}_{mv} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)}{n}$$

C.S.
$$\frac{\partial^2 \ln L(x_1,...,x_n, \boldsymbol{d})}{\partial\theta^2} = -\frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)}{\theta^2} < 0 \Rightarrow máx$$

En este caso concreto, estimador por el método de los momentos y el estimador por el método de máxima verosimilitud coinciden (no es así en general).

2.- Se extrae una muestra por m.a.s. de tamaño ñnò de una población sabiendo que la función de densidad poblacional es: $f(x) = f(x,\theta) = \dfrac{\theta}{(1+x)^{1+\theta}} \qquad x \geq 0,\ \theta > 0.$

Obtener el estimador por el método de máxima verosimilitud.

Solución:

El método de máxima verosimilitud utiliza la función de probabilidad poblacional (en este caso continua con función de densidad), obtiene la verosimilitud, toma logaritmos y maximiza.

$$L(x_1,\ldots,x_n,\boldsymbol{d}) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i,\theta) = \frac{\theta^n}{\prod_{i=1}^{n}(1+x_i)^{1+\theta}}$$

$$Ln\,L(x_1,\ldots,x_n,\boldsymbol{d}) = nLn\theta - (1+\theta)\sum_{i=1}^{n} Ln(1+x_i)$$

$$\frac{\partial Ln\,L(x_1,\ldots,x_n,\boldsymbol{d})}{\partial \boldsymbol{d}} = \frac{n}{\theta} - \sum_{i=1}^{n} Ln(1+x_i) = 0$$

$$\Rightarrow \hat{\theta}_{mv} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} Ln(1+x_i)}$$

$$\left.\frac{\partial^2 Ln\,L(x_1,\ldots,x_n,\boldsymbol{d})}{\partial \boldsymbol{d}^2}\right|_{\theta=\hat{\theta}} = -\frac{n}{\hat{\theta}^2} < 0$$

3.- Se extrae una muestra por m.a.s. de tamaño ñnò de una población sabiendo que la función de densidad poblacional es: $f_{\xi}(x,\theta) = (\theta+1)\cdot x^{\theta} \quad con \quad \theta > -1 \quad y \quad 0 < x < 1$

Obtener el estimador por el método de los momentos y el estimador por el método de máxima verosimilitud.

Solución:

*El método de los momentos iguala momentos respecto al origen muestrales y poblacionales. Como sólo hay un parámetro a estimar (el **ñdò**) se necesita plantear una ecuación. Lo razonable es buscar la más sencilla y comprobar que da un resultado **ñ**adecuado**ò** (soluciona el problema que se tiene).*

Se plantea la ecuación $\alpha_1 = a_1 \Rightarrow \int_0^1 x\cdot(\theta+1)\cdot x^{\theta}\,dx = a_1 \Rightarrow \dfrac{\theta+1}{\theta+2} = a_1$

Se despeja el estimador $\hat{\theta}_{mm} = \dfrac{1-2a_1}{a_1-1} = \dfrac{1-2\overline{X}}{\overline{X}-1}$.

El método de máxima verosimilitud utiliza la función de probabilidad poblacional (en este caso continua con función de densidad), obtiene la verosimilitud, toma logaritmos y maximiza.

$$L(x_1,\ldots,x_n,\boldsymbol{d}) = \prod_{i=1}^{n} f\left(x_i,\theta\right) = \prod_{i=1}^{n} (\theta+1)\cdot x_i^{\theta} = (\theta+1)^n \cdot \prod_{i=1}^{n} x_i^{\theta}$$

$$Ln\,L(x_1,\ldots,x_n,\boldsymbol{d}) = n\ln(\theta+1) + \theta\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$$

*La primera derivada se iguala a cero (condición necesaria) y se comprueba que la segunda **ñ**evaluada**ò** es menor que cero (condición suficiente para que el punto lleve al máximo de la función)*

$$\frac{\partial Ln\,L(x_1,\ldots,x_n,\boldsymbol{d})}{\partial \boldsymbol{d}} = \frac{n}{\theta+1} + \sum_{i=1}^{n}\ln x_i = 0$$

$$\Rightarrow \breve{\theta}_{mv} = -\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i} - 1$$

$$\left.\frac{\partial^2 Ln\,L(x_1,\ldots,x_n,\boldsymbol{d})}{\partial \boldsymbol{d}^2}\right|_{\theta=\breve{\theta}} < 0$$

En este caso concreto, estimador por el método de los momentos y el estimador por el método de máxima verosimilitud no coinciden.

4.- Se extrae esta muestra por m.a.s.

x_i	-1	0	+1
n_i	10	25	15

de una población que sigue el modelo

$\xi=x$	-1	0	+1
$P(\xi=x)$	$(1-\theta)/2$	½	$\theta/2$

Obtener el estimador por el método de los momentos y el estimador por el método de máxima verosimilitud.

Solución:

El método de los momentos iguala momentos respecto al origen muestrales y poblacionales. Como sólo hay un parámetro a estimar (el **“θ”***) se necesita plantear una ecuación. Lo razonable es buscar la más sencilla y comprobar que da un resultado* **“***adecuado***”** *(soluciona el problema que se tiene).*

El primer momento muestral es $a_1 = \dfrac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} = \overline{X}$

El primer momento poblacional es $\alpha_1 = E(\xi) = \sum_i x_i \cdot P(\xi = x_i) = \theta - (1/2)$

Igualando se llega al estimador $a_1 = \alpha_1 \Rightarrow \hat{\theta}_{mm}(X) = \overline{X} + (1/2)$

Sustituyendo los valores muestrales para la media muestral se tiene la estimación puntual $\hat{\theta}_{mm}(x) = \overline{x} + (1/2) = (1/10) + (1/2) = 6/10 = 3/5$

El método de máxima verosimilitud utiliza la función de probabilidad poblacional (en este caso discreta) para obtener la verosimilitud, toma logaritmos y maximiza.

Función de Verosimilitud y función soporte

$$L(x_1,\ldots,x_n,\theta) = \prod_{i=1}^{n} P(\xi = x_i, \theta) = \left(\frac{1-\theta}{2}\right)^{10} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{25} \cdot \left(\frac{\theta}{2}\right)^{15}$$

$$Ln\, L(x_1,\ldots,x_n,\theta) = 10 \ln\left(\frac{1-\theta}{2}\right) + 25 \ln\left(\frac{1}{2}\right) + 15 \ln\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Máximo que conduce al estimador (el punto donde se alcanza el máximo)

$$\frac{\partial Ln\, L(x_1,\ldots,x_n,\theta)}{\partial \theta} = \frac{-10}{1-\theta} + \frac{15}{\theta}$$

$$CN \Rightarrow \frac{\partial Ln\, L(x_1,\ldots,x_n,\theta)}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow \hat{\theta}_{mv}(x) = \frac{3}{5}$$

$$CS \Rightarrow \left.\frac{\partial^2 Ln\, L(x_1,\ldots,x_n,\theta)}{\partial \theta^2}\right|_{\theta=\hat{\theta}} < 0$$

En este caso concreto, la estimación puntual por el método de los momentos y la estimación puntual por el método de máxima verosimilitud coinciden (no es así en general).

5.- Se extrae una muestra por m.a.s. de tamaño ñnò de una población que sigue el modelo B(m,p). Obtener el estimador por el método de los momentos y el estimador por el método de máxima verosimilitud de ď=p.

Solución: $\hat{\theta}_{mm} = \hat{\theta}_{mv} = \overline{X} / m$

6.- Se extrae una muestra por m.a.s. de tamaño ñnò de una población que sigue el modelo N(µ,ů) con parámetros desconocidos. Obtener el estimador por el método de los momentos y el estimador por el método de máxima verosimilitud de ď$_1$= µ.

Solución: $\hat{\theta}_{1mm} = \hat{\theta}_{1mv} = \overline{X}$

7.- Se extrae una muestra por m.a.s. de tamaño ñnò de una población sabiendo que la función de densidad poblacional es: $f_\xi(x,\theta) = \dfrac{2\cdot(\theta - x)}{\theta^2} \quad con \quad 0 < x < \theta$

Obtener el estimador por el método de los momentos.

Solución:

El método de los momentos iguala momentos respecto al origen muestrales y poblacionales. Como sólo hay un parámetro a estimar (el ***ñdò****) se necesita plantear una ecuación. Lo razonable es buscar la más sencilla, es decir, igualar* $a_1 = \alpha_1$

El primer momento muestral es $a_1 = \dfrac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n} = \overline{X}$

El primer momento poblacional es $\alpha_1 = E(\xi) = \displaystyle\int_0^\theta x\cdot\frac{2\cdot(\theta - x)}{\theta^2}dx = \theta / 3$

Igualando se llega al estimador $a_1 = \alpha_1 \Rightarrow \hat{\theta}_{mm}(X) = 3\overline{X}$

8.- Se extrae una muestra por m.a.s. de tamaño ñnò de una población ɜ=U(0,ď). Obtener el estimador por el método de los momentos. Si la muestra es x(0,1,8), obtener la estimación puntual y comentarla.

Solución:

El método de los momentos iguala momentos respecto al origen muestrales y poblacionales. Como sólo hay un parámetro a estimar (el ***ñdò****) se necesita plantear una ecuación. Lo razonable es buscar la más sencilla, es decir, igualar* $a_1 = \alpha_1$.

El primer momento muestral es $a_1 = \dfrac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n} = \overline{X}$

El primer momento poblacional es $\alpha_1 = E(\xi) = \dfrac{0 + \theta}{2} = \theta / 2$

Igualando se llega al estimador $a_1 = \alpha_1 \Rightarrow \hat{\theta}_{mm}(X) = 2\overline{X}$

La estimación puntual sería $\hat{\theta}_{mm}(x) = 2\overline{x} = 2\dfrac{0+1+8}{3} = 2\cdot 3 = 6$

Claramente incompatible con los datos ya que una U(0,6) no puede tener un valor muestral 8.

9.- Se extrae una muestra por m.a.s. de tamaño ñnò de una población sabiendo que la función de densidad poblacional es: $f(x,\theta) = \theta \cdot e^{-\theta x} \quad para \quad \theta \le x$

Obtener el estimador por el método de máxima verosimilitud.

Solución:

El método de máxima verosimilitud utiliza la función de probabilidad poblacional (en este caso continua con función de densidad), obtiene la verosimilitud, toma logaritmos y maximiza.

$$L(x_1,\ldots,x_n,\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i,\theta) = \prod_{i=1}^{n} \theta \cdot e^{-\theta x_i} = \theta^n \cdot e^{-\theta \sum_i x_i}$$

$$Ln\, L(x_1,\ldots,x_n,\theta) = n \ln \theta - \theta \sum_{i=1}^{n} x_i$$

La primera derivada se iguala a cero (condición necesaria) y se comprueba que la segunda **ñ***evaluada***ò** *es menor que cero (condición suficiente para que el punto lleve al máximo de la función)*

$$\frac{\partial Ln\, L(x_1,\ldots,x_n,\theta)}{\partial \theta} = \frac{n}{\theta} - \sum_{i=1}^{n} x_i = 0$$

$$\Rightarrow \hat{\theta}_{mv} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i} = \frac{1}{\bar{x}}$$

$$\left. \frac{\partial^2 Ln\, L(x_1,\ldots,x_n,\theta)}{\partial \theta^2} \right|_{\theta=\hat{\theta}=\frac{1}{\bar{x}}} < 0$$